INICIACIÓN A LA INVESTIGACIÓN
REVISTA ELECTRÓNICA
UNIVERSIDAD DE JAÉN

Ini Inv, e1: a15 (2006)

Argumentaciones lógicas: El razonamiento matemático a través del ordenador

Miguel A. García, Carmen Ordóñez y Juan F. Ruíz

Departamento de Matemáticas (Área de Álgebra). Universidad de Jaén.
Campus Las Lagunillas s/n, 23071 Jaén.
ccanada@ujaen.es

PRESENTACIÓN

Todo el mundo posee una idea espontánea sobre lo que significa lógica. Entendemos por lógico al pensamiento recto y consecuentemente trabado, e ilógico al que carece de esta interna ilación. Según la etimología de su mismo nombre, *logia* (del griego logos) significa estudio o tratado racional y así, el objeto de estudio de esta disciplina es el razonamiento y éste se expresa mediante el lenguaje.

Característica peculiar de la lógica medieval es su profunda dependencia de una estructura lingüística particular, la de la lengua latina (amén de la metafísica y la teología). Los medievales consiguieron reconstruir la lógica proposicional pero es Leibniz a quien se reconoce como el "fundador de la lógica matemática". Sin embargo, fue a mediados del siglo XIX cuando la lógica matemática se constituyó como ciencia con los trabajos de Boole (desarrollando un modelo algebraico de la lógica de proposiciones) y Fregge (formalizando la lógica de predicados).

Una nueva época para la lógica se produce a mediados del siglo XX, con la aparición de los ordenadores, cuando se planteó el procesamiento automático de inferencias. Se produjeron muchos resultados en el campo de las aplicaciones prácticas y también se elaboraron lenguajes de programación especialmente adecuados a la lógica.

En resumen, la Lógica Matemática estudia la forma del razonamiento utilizando el lenguaje matemático, los símbolos y distintos tipos de demostraciones. No cabe duda de que es de gran importancia en esta materia el estudio de las argumentaciones. Utilizaremos el cálculo de enunciados para determinar si un argumento es válido o inválido.

La experiencia que exponemos se enmarca en el tema uno de la asignatura Álgebra I del primer curso de Ingeniería Técnica en Informática de Gestión. Nos encontramos ante alumnos recién llegados a la Universidad de Jaén y que, por tanto, han tenido un contacto escaso con esta disciplina de las matemáticas. Los conocimientos que poseen sobre lógica son muy heterogéneos pues los estudiantes proceden de distintas enseñanzas. Sólo los que han cursado bachillerato han tenido un acercamiento, desde la filosofía, a cuestiones relacionadas con tablas de verdad y conectivas; sin embargo, todos se sitúan ante la asignatura con una actitud adversa pues no comprenden el papel que las matemáticas desempeñan en esta ingeniería. Sin embargo, los alumnos matriculados en esta carrera tienen como denominador común su preferencia por todo lo relativo al ordenador y una gran facilidad para desenvolverse en este medio. Aprovechamos estas características para presentar el estudio de la validez o invalidez de las argumentaciones a través del ordenador.

OBJETIVOS

Las especiales características del alumnado con el que vamos a trabajar en este tema, nos hacen plantearnos una doble vertiente respecto de los objetivos que nos proponemos conseguir con esta forma de impartir la docencia:

- por un lado *motivar* a todos (intentando recuperar lo que algunos ya conocen y empezando desde cero para que los que están más lejos puedan incorporarse fácilmente);
- por otra parte, hacer que todos se inicien en la compresión y en el uso del *lenguaje matemático*. Este estudio nos permitirá, de forma indirecta, acercar al alumno al manejo de los distintos tipos de demostraciones matemáticas; por ejemplo, la proposición que exponemos en los preliminares teóricos justifica la reducción al absurdo. Todo esto nos pondrá en la línea de adquirir una correcta expresión en el uso del lenguaje matemático y simbólico.

No podemos olvidar el papel tan importante que juega esta materia en el desarrollo de la informática. Así, como objetivo podemos resaltar también el *estudio exhaustivo* de este tema y sus distintas aplicaciones. Además el conjunto de las proposiciones nos proporcionarán un primer ejemplo de una estructura muy significativa en los estudios relativos a esta ingeniería, como es el Álgebra de Boole, sin el cual sería muy difícil la comprensión de la composición de circuitos que forman parte de la estructura de una computadora.

Nos daremos cuenta de que esta primera aproximación que constituye el estudio de la validez en argumentaciones es insuficiente y así intentaremos suscitar, una vez puesto el primer peldaño, la necesidad de introducirnos en el cálculo de predicados y conducirnos hacia la construcción de un sistema formal llamado lenguaje de primer orden.

El uso del ordenador va a facilitar el acercamiento de los alumnos a los temas lógicos y a las matemáticas en general. Les mostraremos cómo es preciso un elevado nivel de abstracción y lenguaje matemático para poder programar, y aprovecharemos el atractivo del ordenador para enseñarles a razonar a través de la computadora.

Pretendemos con esta metodología que haya una conexión íntima entre la teoría y la práctica. Ahora, el ordenador no se utiliza solamente como una potente calculadora científica, sino que está integrado en uno de los pasos de la resolución de determinados problemas.

DESARROLLO

A. EXPERIENCIA PRÁCTICA

Como hemos dicho, pensamos que la enseñanza de teoría y problemas debe ir íntimamente ligada a las prácticas con ordenador. Tanto es así, que en nuestra experiencia cotidiana el mismo problema propuesto en el examen de teoría luego se propondrá para resolverlo en el aula de ordenadores con el uso del programa con el que se esté trabajando.

Inicialmente nos planteamos trasladar cada problema al ordenador. Para ello implementamos programas que acometieran la mayor parte de lo estudiado y siempre intentamos que esto fuera lo más didáctico posible, pretendiendo que fuera una fiel traslación de lo que hacíamos en clase. Así conseguimos programas como el que calcula tablas de verdad para una forma enunciativa, otro para calcular formas normales,....

Sin embargo, en ejercicios donde había un desarrollo teórico previo y era necesaria una conexión con la teoría, observamos que los alumnos tenían grandes dificultades para utilizar conjuntamente la aplicación de los conceptos y el uso del ordenador. Esto nos llevó a un avance en la metodología empleada para la resolución de los problemas. Así, en estos casos pensamos en utilizar un lenguaje algorítmico que esquematizara perfectamente la resolución del problema y nos permitiera estructurarlo en distintos pasos bien diferenciados:

- En primer lugar, partimos de la *simbolización del problema* que corresponde al uso del lenguaje matemático. Esto es algo que los matemáticos hacemos casi automáticamente pero que tiene gran importancia y supone la primera dificultad para el alumno. Pensemos que, simplemente el uso de la notación adecuada es un gran avance para un estudio correcto y simple.
- En segundo lugar, *seleccionaremos el concepto o los resultados* necesarios para la resolución, lo que conecta con la teoría.
- A continuación, *aplicaremos las herramientas informáticas* que hemos creado para ello.
- Por último, *interpretaremos la salida del programa* relacionándolo nuevamente con el concepto y *concluiremos la realización del ejercicio*.

Para mostrar esta metodología partiremos de dos ejemplos concretos, que han constituido ejercicios de examen en los últimos años, donde pondremos de manifiesto, de una forma práctica, nuestra experiencia docente a la hora de abordar el estudio de estos argumentos para deducir si son válidos o inválidos.

Ejemplo 1. (Febrero 98) Consideremos los siguientes enunciados:

Antonio necesita un matemático o un informático.

Si Antonio necesita un informático entonces necesita un matemático.

Utilizar la lógica proposicional para contestar a las siguientes preguntas:

1. ¿Necesariamente se deduce que Antonio necesita un informático?
2. ¿Necesariamente se deduce que Antonio necesita un matemático?

Ejemplo 2. (Febrero 05) Utilizar la lógica proposicional para resolver el siguiente problema:

Para aprobar las prácticas de Álgebra I: cada alumno debe asistir a clase, hacer un cuaderno de prácticas aceptable y demostrar que dicho cuaderno de prácticas ha sido realizado por el alumno mediante una prueba escrita; o hacer un cuaderno de prácticas aceptable y superar el examen final.

1. Pepito hizo un cuaderno de prácticas aceptable pero no demostró que lo hizo él en la prueba escrita. Sabiendo que Pepito superó el examen final, ¿aprobó Pepito las

prácticas?

2. Juanito asistió a clase, hizo una patata de cuaderno pero realizó bien la prueba escrita donde demostraba que él era el autor del cuaderno. Juanito también aprobó el examen final, ¿aprobará las prácticas Juanito?

En primer lugar, desarrollaremos los conceptos básicos de la lógica para deducir el estudio. A continuación desarrollaremos las herramientas informáticas que hemos creado para realizar dicha exposición y que no son más que una traslación al ordenador de la parte teórica y de lo que el alumno realiza sobre el papel. Por último, obtendremos los resultados.

B. PRELIMINARES TEÓRICOS

Previo al estudio de los razonamientos, repasaremos conceptos básicos de cálculo proposicional imprescindibles para poder abordar la resolución de los ejemplos anteriores.

Entendemos por enunciado cualquier frase que pueda considerarse verdadera o falsa. Distinguimos entre enunciados simples (un sujeto y un predicado) o compuestos (formados a partir de varios enunciados simples unidos por medio de algún término de enlace o conectiva). Recordemos que las conectivas más comunes y los símbolos que empleamos para denotarlas son:

$\sim$	Negación
$\wedge$	Conjunción, y
$\vee$	Disyunción, o
$\rightarrow$	Entonces
$\leftrightarrow$	Si y solo si

Además existen otras como las conectivas *Nor, Nand* y *Xor* que denotamos por $\downarrow$, | (o bien $\uparrow$) y $\oplus$, respectivamente.

Por una forma enunciativa entendemos cualquier expresión en la que intervienen *variables de enunciado* (variables que toman uno de los valores de verdad: verdadero, *V* o falso, *F*) y conectivas que puede formarse utilizando las reglas:

(a) Toda variable de enunciado es una forma enunciativa.

(b) Si *A* y *B* son formas enunciativas, entonces $(\sim A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ y $(A \leftrightarrow B)$ son formas enunciativas.

Asociada a cada forma enunciativa es posible obtener su tabla de verdad.

Una forma enunciativa es una *tautología* si su tabla de verdad siempre toma el valor de verdad *V* para cada una de las posibles combinaciones de valores de verdad de las variables de enunciado que intervienen en ella.

Deducimos por tanto, que el estudio para determinar si una forma enunciativa es tautología, se basa en la construcción de su tabla de verdad para observar posteriormente si sólo aparecen verdaderos.

Entendemos por una forma argumentativa cualquier sucesión finita de formas enunciativas, de las cuales la última es considerada como la conclusión y las restantes como las premisas.

Una forma argumentativa

$$A_1, A_2, ..., A_n; \therefore A$$

es inválida si es posible encontrar al menos una combinación de valores de verdad de las variables de enunciado que intervienen en dicha forma argumentativa, de manera que cada una de las premisas A_1, A_2 ,..., A_n tomen el valore de verdad *V* y *A* tome el valor de verdad *F*. En otro caso, decimos que la forma argumentativa es válida.

Proposición. La forma argumentativa $A_1, A_2, ..., A_n; \therefore A$ es válida si y sólo si la forma enunciativa $((A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n) \rightarrow A)$ es una tautología.

La proposición anterior nos dará la clave para profundizar en el estudio de la validez de una argumentación con cualquier lenguaje de programación.

C. HERRAMIENTAS INFORMÁTICAS

Utilizaremos para trabajar en el ordenador el programa Mathematica, especialmente diseñado para realizar cálculos y operaciones matemáticas y de cuya licencia dispone en estos momentos la Universidad de Jaén. Sin embargo, los programas que hemos realizado para esta experiencia pueden traducirse a cualquier lenguaje de programación.

C.1. Para introducir una forma enunciativa en Mathematica, tan sólo tendremos que escribir las correspondientes expresiones formadas por variables y conectivas. Para introducir estas últimas, ofrecemos en la siguiente tabla diversas opciones:

CONECTIVA	FORMA 1	FORMA 2	FORMA 3
$\sim p$	!p	Not[p]	¬ p
$p \wedge q$	p && q	And[p, q]	p ∧ q
$p \vee q$	p || q	Or[p, q]	p ∨ q
$p \rightarrow q$	-	Implies[p, q]	p ⇒ q
$p \uparrow q$	-	Nand[p, q]	p ⊼ q
$p \downarrow q$	-	Nor[p, q]	p ⊻ q
$p \oplus q$	-	Xor[p, q]	p ⊕ q

En el caso en que queramos utilizar alguna conectiva que no incorpore el programa deberemos predefinirla. Por ejemplo, vamos a definir una función con dos variables que nos asocie a cada combinación de valores de verdad de las variables otro valor de verdad que corresponda con el que se obtiene mediante la conectiva $\leftrightarrow$. Esto lo podemos hacer usando la equivalencia lógica

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

y podemos definir una función Sii[p, q] mediante la expresión:

```
Sii[p_,q_]:=Implies[p,q] && Implies[q,p]
```

C.2. Utilizaremos el siguiente programa para comprobar si la forma enunciativa es o no una tautología:

```
n =Número de variables de enunciado distintas;
tautologia=True;
p=Table[False,{t,n}];
expresion:=Forma enunciativa que queremos comprobar si es
tautología;
For[i=0,i<2^n,i++,
     j=i;
    For[f=n,f>0,f--,
         resto=Mod[j,2];
```

```
          j=Floor[j/2];
         If[resto==0,p[[f]]=True,p[[f]]=False];
     ];
If[TrueQ[expresion],Null,tautologia=False];
 ];
If[tautologia,Print["La forma enunciativa es una tautología"],
Print["La forma enunciativa no es una tautología"]]
```

Nótese que no ha sido preciso el cálculo completo de la tabla de verdad, sólo hemos ido evaluando las 2^n combinaciones de valores de verdad para ver si todas son verdaderas.

C.3. Como consecuencia de la proposición que hemos enunciado, tenemos una forma directa de determinar cuando una forma argumentativa es válida sin más que aplicar el programa anterior a la forma enunciativa $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow A$ que se deduce de la argumentación.

D. RESOLUCIÓN

Ejemplo 1.1. Para resolverlo seguiremos los siguientes pasos:

Paso 1: Simbolizamos los enunciados en las variables siguientes:

Antonio necesita un matemático: p
Antonio necesita un informático: q

Paso 2: Construimos la argumentación:

$$p \vee q\ ,\ q \rightarrow p\ ;\ \therefore q$$

Paso 3: Aplicamos la proposición y reducimos el problema al estudio de si la forma enunciativa

$$(p \vee q) \wedge (q \rightarrow p) \rightarrow q$$

es tautología.

Paso 4: Aplicamos el programa de cálculo de tablas de verdad o el de tautologías a la forma enunciativa del paso anterior. En nuestro caso optaremos por el último.

Paso 5: Interpretamos la salida del programa.

La forma enunciativa no es tautología

Por tanto, como no es tautología, la argumentación es inválida. Responderemos que no se puede deducir que Antonio necesite un informático.

Si repetimos el proceso para el caso 1.2., obtendremos como salida "La forma enunciativa es tautología" y así la argumentación es válida. De esto se puede deducir que Antonio necesita un matemático.

Ejemplo 2.1. Para obtener conclusiones sobre el ejemplo 2.1. seguiremos los mismos pasos:

Paso 1: Simbolizaremos los enunciados en las variables siguientes:

Aprobar las prácticas de Álgebra I: p
Cada alumno debe asistir a clase: q
Cada alumno debe hacer un cuaderno de prácticas aceptable: r
Cada alumno debe demostrar que dicho cuaderno de prácticas ha sido realizado por él mediante una prueba escrita: s

Cada alumno debe superar el examen final: t

Paso 2: Construimos la argumentación:

$$p \leftrightarrow (q \wedge r \wedge s) \vee (r \wedge t)\ ,\ \ r \wedge (\sim s),\ \ t\ ;\ \therefore p$$

Los siguientes pasos son análogos al ejemplo 1. Observemos que aquí el número de variables hace inviable el cálculo de la tabla de verdad a mano, pero puede seleccionarse dicho método en el ordenador.

RESULTADOS

Esta metodología nos ha permitido observar que el alumno cae en la cuenta y sabe diferenciar cada uno de los pasos a seguir en la resolución de un problema.

El lenguaje en forma algorítmica, con el que el estudiante de esta ingeniería está familiarizado porque lo trabaja en otras materias, le permite descubrir que el álgebra no es algo anclado y externo a él sino que está íntimamente relacionada con la informática.

La necesidad de simbolizar para plantear problemas reales y que se encontrarán en su futura vida profesional, les suscita la importancia de la notación y el uso correcto del lenguaje matemático. A su vez, éste será imprescindible para implementar, en cualquier lenguaje de programación, órdenes que sean comprendidas por el ordenador.

La computadora, ahora, se convierte en algo más que una calculadora científica sino que hacemos de ella un uso más extenso: vamos a poder implementar conceptos, hipótesis de teoremas, deberemos discriminar qué resultado aplicar,....

CONCLUSIONES

Esta metodología es adecuada porque consigue motivar al alumno, adquirir un lenguaje matemático más exhaustivo, traslada los conceptos abstractos al ordenador permitiendo interrelacionar teoría, problemas y prácticas en el aula de ordenadores. En la clase de teoría habrá referencia a los problemas, pero también a cómo discriminar conceptos o resultados con el ordenador. Recíprocamente, también los conceptos teóricos entran en el aula de ordenadores donde los problemas se abordan a mano, previamente, para luego enriquecerse con el uso del ordenador.